

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_3 = 5$ și $a_5 = 11$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$. Determinați numărul real a știind că $f(a) = f(a+1)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - x + 13} = x + 1$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele strict mai mici decât 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(-1,1)$ și $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care dreptele OC și AB sunt perpendiculare.
- 5p** 6. Arătați că, pentru orice număr real x , $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & 1-4x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + xy)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați perechile de numere întregi (m, n) pentru care matricea $A(m)$ este inversa matricei $A(n)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + x + 2ay$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $1 \circ 0 = 1$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Determinați numărul real a , știind că $x \circ 1 > 4$ dacă și numai dacă $x \in (3, +\infty)$.
- 5p** c) Arătați că legea de compoziție „ \circ ” este asociativă dacă și numai dacă $a = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $e^x (f(x) + f'(x)) = 1$, pentru orice număr real x .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că dreapta de ecuație $y = x$ este tangentă la graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^{\pi} f(x) dx = 2$.
- 5p** b) Calculați $\int_0^{\pi} xf(x) dx$.
- 5p** c) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 f^2(x) dx$.